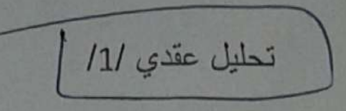
ا. زينب

(2)

جامعة البعث



اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات الدورة الصيفية للعام الدراسي 2015-2016

السؤال الأول : (10+10=20درجة)

1"- أوجد المعادلة الديكارتية لمجموعة نقاط المستوي التي تحقق المعادلة $|z-i| = \operatorname{Im} z + 1$ ثمَّ صف المحل الهندسي لهذه النقاط .

2"- أوجد جذور المعادلة $z^4 - 8z = 0$.

السؤال الثاني : (10+10=20درجة)

1"- عند أي النقاط من المستوي العقدي تكون الدالة

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3-1}{z^2-1} & z \neq \pm 1 \\ \dfrac{3}{2} & z = \pm 1 \end{cases}$$

متصلة ؟

2"- أثبت أنَّ الدالة $f(z) = \sin(x^2-y^2)ch(2xy) + i\cos(x^2-y^2)sh(2xy)$

هي دالة شاملة ثمَّ عبر عن هذه الدالة بدلالة z .

السؤال الثالث: (10+10=20درجة)

1" - أوجد جميع حلول المعادلة $e^z = 2$.

2"- أكتب المقدارين الآتيين $\cos(i)$, $ch(\frac{\pi i}{4})$ بالشكل $a+ib$.

السؤال الرابع : (20درجة)

أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1 = i, z_2 = \infty, z_3 = -3$ فوق النقاط $w_1 = o, w_2 = 1, w_3 = \infty$ ثمَّ أوجد خيال المستقيم $y = 0$ وفق التحويلة الناتجة .

السؤال الخامس : (10+10=20درجة)

أوجد قيمة التكاملين

$$I_1 = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^3 - z} dz \quad , \quad I_2 = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3 - 1}$$

مدرس المقرر

د. رزان الشيخ نترو

جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات

الإجابات النموذجية لمادة التحليل العقدي /1/ الدورة الصيفية 2015-2016

جواب السؤال الأول : 10+10=20درجة

1"- بفرض أنّ $z = x + iy$ عندئذ $|x + i(y-1)| = y + 1$ ومنه وإستنادا" إلى تعريف طويلة عدد عقدي يكون $x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$

وهذه النقاط تمثل قطع مكافئ ذروته $(0,0)$ محوره المحرقي هو المحور العمودي وتقعره نحو y^+ ووسيطه $p = \frac{1}{8}$.

2"- جذور المعادلة $z^4 - 8z = 0$ $\Leftarrow$ $z\ (z^3 - 8) = 0$

ومنه إمّا $z = 0$ أو $z^3 - 8 = 0$ أي أنّ $z = (8)^{\frac{1}{3}}$ وبما أنّ

$8 = 8(\cos 0 + i\ \sin 0)$ فإنّ $(8)^{\frac{1}{3}} = 2(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\ \sin\frac{2k\pi}{3})$ $k = 0,1,2$

من أجل $k = 0$ فإنّ $z_2 = 2(\cos 0 + i\ \sin 0) = 2$

من أجل $k = 1$ فإنّ $z_3 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\frac{2\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + i\sqrt{3}$

وبالتالي فإنّ الجذر الرابع هو $z_4 = -1 - i\sqrt{3}$

جواب السؤال الثاني :10+10=20درجة

1"- حتى تكون الدالة مستمرة في النقطة z_0 يجب أن يكون $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

الدالة المعطاة معرفة عند جميع نقاط المستوي العقدي وهي مستمرة عند كل نقطة z حيث $z \neq \pm 1$

أما عند $z = 1$ وبما أنّ $\lim \frac{z^3 - 1}{z^2 - 1} = \frac{0}{0}$ وبالتالي فإنّ $\lim\limits_{z \to 1} \frac{z^3 - 1}{z^2 - 1} = \lim\limits_{z \to 1} \frac{3z^2}{2z} = \frac{3}{2} = f(1)$

هذا يعني أنّ الدالة مسمرة أيضا" عند $z = 1$ ولكن بما أنّ $\lim\limits_{z \to -1} \frac{z^3 - 1}{z^2 - 1} = -\frac{2}{0} = \infty \neq f(-1)$

فهي غير مستمرة عند $z = -1$.

2"- تكون الدالة شاملة إذا وفقط إذا كانت تحليلية في جميع نقاط المستوي العقدي وتكون تحليلية إذا كانت قابلة للإشتقاق وتكون قابلة للإشتقاق إذا وفقط إذا كانت المشتقات الجزئية للدالتين

$$u(x,y)=\sin(x^2-y^2)ch(2xy) \quad , \quad v(x,y)=\cos(x^2-y^2)sh(2xy)$$

موجودة ومستمرة وتحقق شرطا كوشي – ريمان $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \; , \; \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2-y^2)ch(2xy)+2y\sin(x^2-y^2)sh(2xy)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2y\sin(x^2-y^2)sh(2xy)+2x\cos(x^2-y^2)ch(2xy)$$

ومن هاتين المعادلتين نلاحظ أنّ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ كما نلاحظ أنّ

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2x\sin(x^2-y^2)sh(2xy)+2y\cos(x^2-y^2)ch(2xy)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y\cos(x^2-y^2)ch(2xy)+2x\sin(x^2-y^2)sh(2xy)$$

أيضا" من هاتين المعادلتين نلاحظ أنّ $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ مما سبق نستنتج أنّ الدالة المعطاة هي دالة قابلة للإشتقاق وبالتالي تحليلية وبالتالي شاملة ومنه فإنّ

$$.f(z)=\sin(z^2-0)ch(2z.0)+i\cos(z^2-0)sh(2z.0)=\sin z^2$$

<u>جواب السؤال الثالث :10+10=20درجة</u>

1- بفرض أنّ $z=x+iy$ عندئذ $e^x\cos y+ie^x\sin y=2$ ومنه فإنّ

$e^x\sin y=0 \quad , \quad e^x\cos y=2$ من المعادلة الأولى نجد أنّ $\sin y=0 \Rightarrow y=n\pi$

نعوض في الثانية فنجد أنّ $e^x=\pm 2$ وبما أنّ $e^x \succ 0$ هذا يعني أنّ المعادلة $e^x=-2$ مستحيلة

أي أنّ $y=2n\pi$ ومن أجل هذه القيم يكون $x=\ln 2$ أي أنّ $z=\ln 2+i2n\pi$.

"2 بما أن $\cos(x+iy)=\cos x\, chy - i\sin x\, shy$ 2

(١٥)

فإن $\cos(i)=\cos(0)ch(1)-i\sin(0)sh(1)=ch(1)$ 2+1

كذلك بما أن $ch(x+iy)=chx.\cos y+i\, shx.\sin y$ 2

فإن $ch(\frac{\pi i}{4})=ch(0).\cos(\frac{\pi}{4})+ish(0)\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}+i0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2+1

<u>جواب السؤال الرابع :20درجة</u>

التحويلة هي من الشكل

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}.\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}.\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$ 3

وبما أن $z_2=\infty, w_3=\infty$ فعندئذ التحويلة تأخذ الشكل الآتي

$$\frac{w-w_1}{w_3w-1}.\frac{w_3w_2-1}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}.\frac{1-z_2z_3}{1-z_1z_2}$$ 3

ومنه بالتعويض بالقيم المعطاة على أن نعوض عن z_2 بصفر و w_3 بصفر نجد أن

$$\frac{w-0}{0-1}.\frac{0-1}{1-0}=\frac{z-i}{z+3}.\frac{1-0}{1-0}\Rightarrow w=\frac{z-i}{z+3}$$ 3+3

ومنه فإن

$$z=\frac{3w-i}{w-1}\Rightarrow x+iy=\frac{3u+i(3v-1)}{u-1+iv}$$ 2+2

ومنه فإن $y=\frac{-3v-u+1}{(u-1)^2+v^2}\Rightarrow v=-\frac{1}{3}u+\frac{1}{3}$ وهو خيال المستقيم $y=0$. 2+2

جواب السؤال الخامس : 10+10=20درجة

(١٥) النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة $z^3-z=0$ أي أن النقاط 1

$z=0\ ,\ z=1\ ,\ z=-1$ وهذه النقاط الثلاثة تقع في داخلية الكفاف المعطى 1+1+1

لذلك نحيط $z=0$ بدائرة c_1 نصف قطرها صغير بقدر كاف كما نحيط $z=1$ بدائرة c_2 نصف قطرها صغير بقدر كاف وكذلك نحيط $z=-1$ بدائرة c_3 نصف قطرها صغير بقدر كاف لكي تكون هذه الدوائر غير متقاطعة مثنى مثنى عندئذ

2 $$\int_{|z|2}\frac{\sin z}{z^3-z}dz=\int_{c_1}\frac{\frac{\sin z}{z^2-1}}{z}dz+\int_{c_2}\frac{\frac{\sin z}{z(z+1)}}{z-1}dz+\int_{c_3}\frac{\frac{\sin z}{z(z-1)}}{z+1}dz$$

2 ومنه فإنّ $$\int_c\frac{\sin z}{z^3-z}dz=2\pi i\left[\frac{\sin z}{z^2-1}\right]_{z=0}+2\pi i\left[\frac{\sin z}{z(z+1)}\right]_{z=1}+2\pi i\left[\frac{\sin z}{z(z-1)}\right]_{z=-1}$$

2 $$=0+2\pi i\frac{\sin 1}{2}-2\pi i\frac{\sin 1}{2}=0$$

4 التكامل المعطى هو من الشكل $\int_c\frac{1}{p(z)}dz$ حيث $p(z)=z^3-1$ وبما أنّ أصفار هذه الدالة تقع على دائرة الوحدة إذاً" الدالة المستكملة في I_2 لها ثلاثة نقاط شاذة تقع على دائرة الوحدة أي جميعها تقع في داخلية الكفاف المعطى لذلك فإنّ $I_2=0$ وهو المطلوب حسابه

2 4

انتهت الإجابات

****

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح